Correction des exercices proposés

ANALYSE

Primitives immédiates et quasi-immédiates

$$\frac{4x^8}{8}+\frac{1}{x^2}+\frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7}+\frac{1}{x}+\sqrt{2}x+c$$

$$-\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{1}{7}tg\,7x+c$$

$$\frac{3\sqrt{8x-1}}{4}+c$$

$$x^4-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c$$

$$\frac{7x^4}{4}-\frac{2}{3x^3}-\frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}+2\sqrt{x}-\pi x+c$$

$$\frac{3\sin 4x}{4}+\frac{tg\,5x}{5}+c$$

$$\frac{-5}{6(6x+2)}+c$$

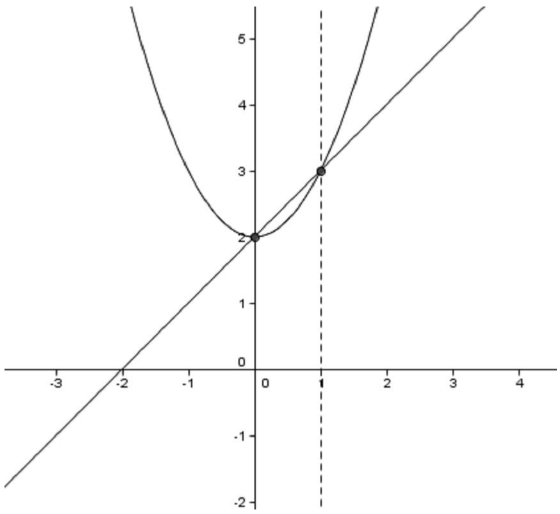
$$\frac{9x^4}{4}+4x^3+\frac{4x^9}{9}+c$$

1.
$$\frac{\sin 6x}{6}+c\ ;\ \frac{3x^2}{2}-\frac{e^{4x}}{4}+c\ ;\ \frac{-1}{6(5x^2+6x-5)^3}+c\ ;\ -\frac{1}{3\ln^3 x}+c\ ;\ \frac{2xe^{3x}}{3}-\frac{2e^{3x}}{9}+c\ ;\ \frac{-1}{(3x^2-5)^2}+c$$

2. $$\left(\frac{3x\sin 2x}{2}+\frac{3}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi/3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}\pi}{4}-\frac{9}{8}$$

3. f(x) et g(x) se coupent en (0,2) et (1,3)

$$A=\int_0^1 x-x^2\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}u^2$$



4. $$A=\int_0^1 3e^{3x}\,dx=\left(e^{3x}\right]_0^1=(e^3-1)u^2$$

5. f(x) s'annule en x = 4/5 et x = 3/2

$$A = -\int_{-1}^{4/5} -10x^2 + 23x - 12\,dx + \int_{4/5}^{1} -10x^2 + 23x - 12\,dx = \left(\frac{-10x^3}{3} + \frac{23x^2}{2} - 12x\right]_{4/5,4/5}^{-1,1} \cong 30.9u^2$$

6. $A = -\int_{-3}^{-2} \frac{1}{2x}\,dx = \left(\frac{\ln|x|}{2}\right]_{-2}^{-3} = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}\,u^2$

7. Entre 0 et π, f(x) et g(x) se coupent en x = π/4

$$A = \int_{0}^{\pi/4} \cos x - \sin x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} \sin x - \cos x\,dx = \left(\sin x + \cos x\right]_{0,\pi}^{\pi/4,\pi/4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 + 1 + 0 - 1) = 2\sqrt{2}\,u^2$$

8. Sug : effectuer d'abord la primitive de tg x

$$A = -\int_{-\pi/3}^{0} tgx\,dx + \int_{0}^{\pi/4} tgx\,dx = \left(-\ln|\cos x|\right]_{0,0}^{-\pi/3,\pi/4} = \left(-\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2(-\ln 1) = -\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{4}\,u^2$$

9. $V = \pi\int_{1}^{2} (e^{2x})^2\,dx = \pi\int_{1}^{2} e^{4x}\,dx = \left(\pi\frac{e^{4x}}{4}\right]_{1}^{2} = \frac{\pi}{4}(e^8 - e^4) \cong 2298u^3$

10.voir ex 5

11.f(x) s'annule en $x = k\frac{\pi}{2}$ et est positif entre les bornes

$$A = \int_{\pi/8}^{\pi/4} \sin 2x\,dx = \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right]_{\pi/8}^{\pi/4} = \left(0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}u^2$$

12. $A = \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\,dx = \left(\frac{\sqrt{4x-2}}{2}\right]_{1}^{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}u^2$

PROBABILITES

1) a) x = 0.7 d'où $x' = \frac{0.7 - 0.66}{0.03} = 1.33$ P = 0.5 – 0.4082 = 0.0918

b) x = 0.6 d'où $x' = \frac{0.6 - 0.66}{0.03} = 2$

x = 0.72 d'où $x' = \frac{0.72 - 0.66}{0.03} = -2$

P = 2 0.4772 = 0.9544

c) D'après la table, P = 0.20 (0.1985) correspond à x' = -0.52 d'où
x = (-0.52*0.03) + 0.66 = 0.6444
la taille maximum du sapin faisant partie des 30% les plus petits est de 64cm

d) D'après la table, P = 0.30 (0.2996) correspond à x' = -0.84 d'où
x = (-0.84 * 0.03) + 0.66 = 0.6348

la taille minimum du sapin pour qu'il soit considéré comme faisant partie des 80% des plus grands est 63 cm

2) Par la loi binomiale : $C_{100000}^{10000}\,0.35^{10000}0.65^{90000}$

3) On joue à pile ou face avec une pièce truquée. La probabilité de tomber sur pile est de 1/3. Si on jette 25 fois la pièce, calculer la probabilité de tomber 10 fois sur pile et 15 fois sur face

   Par la loi binomiale : $C_{25}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{15}$

4) a) C_{49}^{15}

   b) C_{49}^{14}

5) a) P_2 P_6 P_4
   b) P_5 P_6

6) Sur 25 personnes, 14 lisent la revue A, 9 la revue B et 3 les deux revues. De combien de manières peut-on choisir 6 personnes parmi les 25 si
   a. chacune des 6 lit au moins une revue
   b. 4 d'entre elles lisent la revue A, 2 la revue B et chacune d'elles ne lisant qu'une seule revue
   c. 5 d'entre elles lisent au moins la revue A

Sol : d'abord, faire un schéma qui répertorie les revues : (voir à la fin)

Dans A inter B, on a 3 personnes d'où
Dans A mais pas dans B, on a (14 – 3) personnes = 11 personnes
Dans B mais pas dans A, on a (9 – 3) personnes = 6 personnes
Il y a donc (25 – 11 – 6 – 3) = 5 personnes qui ne lisent aucune revue.

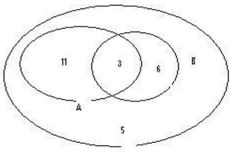
Réponses : a) on choisit 6 personnes parmi 20 personnes (celles qui lisent soit seulement A, soit seulement B, soit les deux)

$$C_{20}^{6} = \frac{20!}{6!.14!} = 38760$$

b) on choisit 4 personnes parmi les 11 personnes qui ne lisent que A d'où $C_{11}^{4} = \frac{11!}{4!.7!} = 330$

c) on choisit 5 personnes parmi les 14 personnes qui lisent A et ensuite on choisit la 6$^{\text{ème}}$ personne parmi toutes celles qui restent (à savoir (25-5)= 20 personnes) d'où

$$C_{14}^{5}.C_{20}^{1} = \frac{14!}{5!.9!}.20 = 40040$$



7) $C_{14}^{3} = \frac{14!}{3!11!} = \frac{12.13.14}{6} = 364$

GEOMETRIE

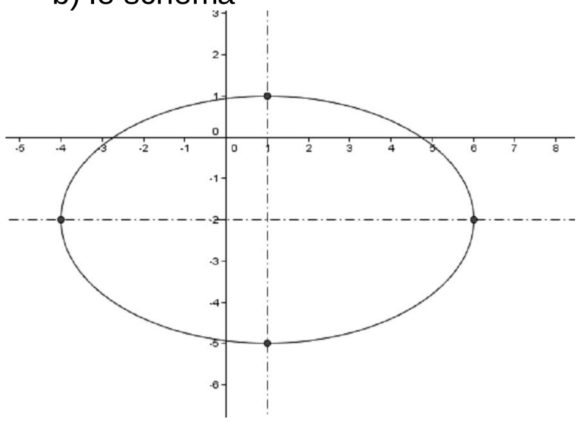
1) la conique $\Gamma \equiv$ 9x² - 18x + 25y² + 100y = 116 peut s'écrire $\Gamma \equiv$ (3x – 3)² + (5y +10)²= 225

ou encore $\Gamma \equiv \dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$

on pose $\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y+2 \end{cases}$ $\quad \Gamma \equiv \dfrac{x'^2}{25} + \dfrac{y'^2}{9} = 1$

a) le type de conique : ellipse, les foyers : F(5,-2) F'(-3,-2), les sommets S_1(6,-2) S_2(-4,-2) S_3(1,1) S_4(1,-5), l'excentricité $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$

b) le schéma



c) P(5, ?) il n'y a pas d'ordonnée positive car y = -1/5 ou -19/5

Prenons P(5,-1/5) ce qui donne dans le système S' : P(4,9/5) et $t \equiv \dfrac{4x'}{25} + \dfrac{y'}{5} = 1$ ou encore

$y' = \dfrac{25-4x'}{5}$ $\; c'est\ \grave{a}\ dire\ \; y+2 = \dfrac{25-4(x-1)}{5}\ ou\ \ y = \dfrac{-4}{5}x + \dfrac{19}{5}$

d) $t \equiv y = 3x \pm \sqrt{225+9} \quad ou \quad y = 3x \pm \sqrt{234}$

e) les droites issues de A(1,2) ont pour équation y – 2 = a (x – 1)

Recherchons celles qui peuvent être tangentes à la conique c'est-à-dire qui n'ont qu'un seul point d'intersection avec la conique

$$\begin{cases} y = ax - a + 2 \\ 9x^2 - 18x + 25y^2 + 100y = 116 \end{cases}$$

$$9x^2 - 18x + 25(a^2x^2 + a^2 + 4 - 2a^2x + 4ax - 4a) + 100(ax - a + 2) = 116$$

$$(9 + 25a^2)x^2 + (-18 - 50a^2 + 200a)x + (25a^2 + 184 - 200a) = 0$$

$$\Delta = 324 + 2500a^4 + 40000a^2 + 1800a^2 - 3600a - 20000a^3 - (36 + 100a^2)(25a^2 + 184 - 200a)$$

$$= 22500a^2 + 3600a - 6300 = 100(225a^2 + 36a - 63)$$

$$on\ \ a\ \ \tan gente\ \ ssi\ \ \Delta = 0$$

$$\Delta_\Delta = 579960000$$

$$a = \frac{-3600 \pm \approx 24000}{45000} = 0.453 ... ou - 0.613 ...$$

$$t_1 \equiv y = 0.453x + 1.547$$

$$t_2 \equiv y = -0.613x + 2.613$$

Points de contact de t_1 : $x = \dfrac{18 + (50 * 0.453^2) + (200 * 0.453)}{2 * 0.453} \cong 131\ et\ \ y = 60.8$

Même raisonnement pour t_2

2) $\Gamma \equiv$ 9x² - 18x - 25y² - 100y = 316 peut s'écrire $\Gamma \equiv (3x-3)^2 - 9 - (5y+10)^2 + 100 = 316$

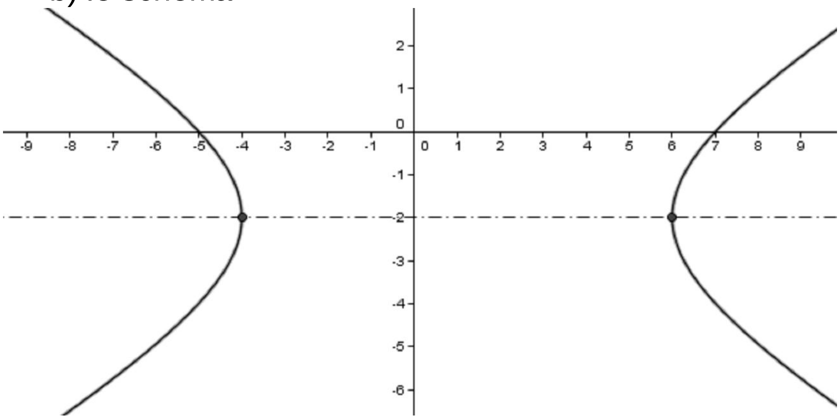
ou $\Gamma \equiv \dfrac{(x-1)^2}{25} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$

on pose $\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y+2 \end{cases}$

a) le type de conique : hyperbole, les foyers $F(\sqrt{34}+1,-2)$ *et* $F'(-\sqrt{34}+1,-2)$,

les sommets $S_1(6,-2)$ et $S_2(-4,-2)$, l'excentricité $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{34}}{5}$

b) le schéma



c) voir raisonnement e) de l'exercice précédent

3) $A(\frac{2}{5}, \pm\sqrt{2})$

$n_1 \equiv y - \sqrt{2} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{5}(x - \dfrac{2}{5})$ *et* $n_2 \equiv y + \sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}(x - \dfrac{2}{5})$

4)

a) équation param. du plan ABC

$$\begin{cases} x = -1 + 3\mu \\ y = -2 + 2\lambda + \mu \\ z = 7 - 3\lambda - 12\mu \end{cases}$$

b) le point d'intersection avec OX :

$$\begin{cases} x = -1 + 3\mu \\ 0 = -2 + 2\lambda + \mu \\ 0 = 7 - 3\lambda - 12\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = 2\lambda + \mu \\ -7 = -3\lambda - 12\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{17}{21} \\ \mu = \dfrac{8}{21} \end{cases}$$

d'où $(\frac{1}{7}, 0, 0)$

c) le vecteur directeur de la droite perpendiculaire au plan ABC est donné par le vecteur normal de ABC. Il faut donc chercher son équation cartésienne

$$ABC \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 3 \\ y+2 & 2 & 1 \\ z-7 & -3 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

-21(x+1) – 9(y+2) – 6(z -7) = 0 ou -21x – 9y – 6z +3 = 0 ou 7x + 3y + 2z – 1 = 0

$\vec{n}(7,3,2)$

$d \equiv \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-8}{3} = \dfrac{z-5}{2}$

5) Rechercher le point d'intersection éventuel entre le plan $\alpha \equiv$ 2x - 4y + z + 2 = 0 et la droite parallèle à d passant par (-1,2,-3) si $d \equiv \frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{4} = 5-z$

$$d' \equiv \frac{x+1}{\frac{3}{2}} = \frac{y-2}{\frac{4}{3}} = \frac{z+3}{-1} \quad \text{avec} \quad \vec{v}(\frac{3}{2},\frac{4}{3},-1)\ ou\ (9,8,-6)$$

$$\alpha \cap d' : \begin{cases} 2x-4y+z+2=0 \\ x=-1+9\lambda \\ y=2+8\lambda \\ z=-3-6\lambda \end{cases}$$

$$2(-1+9\lambda)-4(2+8\lambda)+(-3-6\lambda)+2=0$$

$$\lambda = \frac{-11}{20}$$

$$\alpha \cap d' : (\frac{-119}{20}, \frac{-12}{5}, \frac{3}{10})$$

6) Calculer l'angle entre les droites d et d' si

$$d \equiv \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = \frac{1}{2}+\lambda \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv x+2 = 9-y = \frac{4z-1}{3}$$

$$\vec{v}_d\,(-1,1,0) \quad \vec{v}_{d'}\,(1,-1,\frac{3}{4})$$

$$\cos = \frac{|-1*1+1*(-1)+0*3/4)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(\frac{3}{4})^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{41}{16}}} = \frac{4\sqrt{82}}{41}$$

$$angle = 28°$$